

Matemaatika- olümpiaadide ülesanded

Rohkem kui 365 nuputamisülesannet,
mis panevad proovile nutikuse
ja ergutavad mõtlemist

Inglise keelest tõlkinud Piret Frey



Originaali tiitel:
The Ultimate Mathematical Challenge
HarperCollins Publishers Ltd, 2018

© The UK Mathematics Trust 2018
Eestikeelne tõlge © Piret Frey ja Tänapäev AS, 2019

Toimetanud Katrin Naber
Kujundanud Villu Koskaru

ISBN 978-9949-85-546-9
Trükitud AS Pakett trükikojas

www.tnp.ee

Sisukord

Eessõna Marcus du Sautoylt	vii
Sissejuhatus	ix
Tänusõnad	xv
Ülesanded	1
1. ja 2. nädal	3
1. loogikaülesanne	8
3. ja 4. nädal	10
1. numbriristsõna	14
5. ja 6. nädal	16
Arvude ülesanne	21
7. ja 8. nädal	22
2. numbriristsõna	26
9. ja 10. nädal	28
1. süstikuülesanne	32
11. ja 12. nädal	33
3. numbriristsõna	38
13. ja 14. nädal	40
2. loogikaülesanne	44
15. ja 16. nädal	46
4. numbriristsõna	50
17. ja 18. nädal	52
2. süstikuülesanne	56
19. ja 20. nädal	57
5. numbriristsõna	62
21. ja 22. nädal	64
3. loogikaülesanne	68
23. ja 24. nädal	70
6. numbriristsõna	74
25. ja 26. nädal	76
3. süstikuülesanne	80
27. ja 28. nädal	81
7. numbriristsõna	86
29. ja 30. nädal	88
4. loogikaülesanne	92
31. ja 32. nädal	94
8. numbriristsõna	100
33. ja 34. nädal	102
4. süstikuülesanne	106

35. ja 36. nädal	107
9. numbriristsõna	112
37. ja 38. nädal	114
5. loogikaülesanne	118
39. ja 40. nädal	120
10. numbriristsõna	126
41. ja 42. nädal	128
6. loogikaülesanne	132
43. ja 44. nädal	134
11. numbriristsõna	138
45. ja 46. nädal	140
12. numbriristsõna	144
47. ja 48. nädal	146
Eelvooru ülesanne	151
49. ja 50. nädal	152
13. numbriristsõna	156
51. ja 52. nädal	158
Finaalvooru ülesanne	162
53. nädal	163
Lahendused	165
Ülesanded 1–366	167
Arvude ülesanne	291
Numbriristsõnad	292
Loogikaülesanded	297
Süstikuülesanded	300
Eelvooru ülesanne	304
Finaalvooru ülesanne	309
Sõnastik koos mõne kasuliku faktiga	315
Täisruutude, algarvude jm tabel	320

Eessõna

Marcus du Sautoy

Põhjuseid, miks ma matemaatikasse armusin, on kaks. Esimene oli minu üldhariduskooli matemaatikaõpetaja, kes näitas, et matemaatika on midagi enam, kui vaid lõputud jagamistehted. Kuuldes matemaatika tähtsaid avastuslugusid algarvudest, neljamõõtmelisest geomeetriast, sümmeetriast ja paljust muust, adusin sellest ainest pulbitsevat ilu ja loomingulisust.

Teiseks tutvustas õpetaja mulle Martin Gardneri nuputamisülesandeid *Scientific American*'s. Just siis sattusin sõltuvusse imelisest tundest, mis tekib, kui oled pead murdnud keeruka pähkli kallal ja äkki näed nutikat lahenduskäiku, kuidas jõuda vastuseni. Hoiatan: mõistatuste lahendamine on vägagi sõltuvust tekitav!

Selles raamatus võite osa saada teisest põhjusest, miks mina matemaatikat armastama hakkasin. Raamat on pilgeni pungil ülesannetest, mis on kuulunud UKMT matemaatikavõistluste kavva paljude aastate vältel ja siit leiab ülesandeid, mis sobivad nii õpilastele, kes sooritavad matemaatilisel maastikul alles esimesi uurimisretki, kui ka neile, kes selle aine kõrgemaid tippe vallutavad.

Kuigi ülesanded pärinevad erinevatelt matemaatikavõistlustelt, on minu meelest oluline meeles pidada, et matemaatika ei ole oma olemuselt võistlussport. Matemaatikutena me töötame koos, et mõista ja edasi arendada meie arusaamu arvude universumi ja geomeetria alal. Iga teoreem, mille tõestame, toetub teistele teoreemidele ja nende tõestustele, mida on teinud meie eelkäijad juba Antiik-Kreeka päevadest saadik. Kõigist teadusharudest on just matemaatika unikaalne selle poolest, et me seisame tõesti hiiglaste õlul, et paremini näha ja sügavamalt mõista.

Seega on sinu kui lugeja ainus võistluslik ülesanne tunda lõbu iseendaga võistlemisest. Naudi ülesandeid, mis tunduvad rasked. Just need tekitavad vaimustava tunde, kui sul õnnestub need lõpuks katki hammustada. Mind panevad hommikul voodist tõusma ja laua juurde lahendama minema kõik need ülesanded, mida ma lahendada ei oska. Ja kui sa oled hakkama saanud kõigi selles raamatus olevate ülesannetega, tuleta meelde, et matemaatikas on tohutult palju lugusid, mis endiselt ootavad, et keegi kirjutaks neile viimase peatüki ja lahendaks müsteeriumid, mis on ikka veel paljude matemaatikute kinnismõtteks.

Marcus du Sautoy on matemaatikaprofessor ja Oxfordi ülikooli Charles Simonyi õppetooli teaduse populariseerimise professor.

Sissejuhatus

Selles raamatus on valik ülesandeid, mis on pärit United Kingdom Mathematics Trusti (UKMT) korraldatud võistlustelt ja muudelt üritustelt.

UKMT asutati 1996. aastal, et tuua ühe katuse alla kooliõpilaste matemaatikavõistlused, mida seni korraldasid kolm erinevat organisatsiooni: British Mathematical Olympiad Committee, National Committee for Mathematics Contests ja United Kingdom Mathematics Foundation. Praegu organiseerib UKMT suurt hulka erinevaid matemaatikavõistlusi ja muid üritusi õpilastele vanuses 10–18, eesmärgiga edendada laste ja noorte matemaatikaalast haridust.

Selles raamatus on aasta iga päeva jaoks üks lühike ülesanne ja iga neljateistkümne päeva tagant vahepalaks pikem ülesanne. Ülesanded on erineva keerukusega. Raamatu lõpus on iga ülesande juurde kirja pandud selle päritolu. Võistlus, mille kavast ülesanne on võetud, annab lugejale aimu selle raskusastmest. Ülesande keerukust on raske hinnata ja muidugi sõltub see ka lugejast. Meie plaanide kohaselt peaksid ülesanded aasta algusest kuni lõpuni nädalate möödudes järk-järgult keerukamaks minema. Tõenäoliselt aga leiad sellele üldisele reeglile rohkelt erandeid.

Palju ülesandeid olid algselt üles ehitatud valikvastustega küsimustena, kuid on ümber tehtud, et valikvastused välja jätta. See võib mõne ülesande teha pisut raskemaks, kui see oli alguses, kuid peab arvesse võtma, et kõigil meie võistlustel on õpilastel ülesannete lahendamise aeg piiratud. Ajasurve, mida lugejad ei pea taluma, teebki võistlused õpilastele raskeks.

Olümpiaaditöodes palutakse õpilastel välja kirjutada kogu lahenduskäik, ainult vastusest ei piisa. Nende tööde hindamisel antakse enim punkte veenva ja selgelt väljendatud arutluskäigu eest; arvuliselt õige vastus üksi loeb vähe. See olümpiaadidele omane joon jääb selles raamatus puudu, kuna me ei saa vastuseid hinnata! Seetõttu jääb ülesannete täielik tunnetus poolikuks. Olümpiaadide probleemidest võid lugeda UKMT väljaannetest, mis on üles loetletud allpool.

Peaksid ka arvesse võtma, et UKMT kõigil võistlustel kehtib reegel, et kalkulaatoreid ei tohi kasutada. Põhjuseks on meie soov arendada head matemaatilist mõtlemisoskust. Sina, kallid lugejad, oled muidugi ülesannetega rinda pistes vaba kasutama kalkulaatorit ja muid elektroonilisi seadmeid, kuid meie meelest on neist vaid harva kasu.

Kuidas ülesandeid valiti

UKMT ülesanded on loodud õpilastele, kes parasjagu õpivad matemaatikat. Koostades seda raamatut, mis on mõeldud laiemale lugejaskonnale, hoidusime reeglina neist ülesannetest, mille lahendamiseks läheks vaja

väga keerulist matemaatikat. Näiteks, kuigi algebra on ülesande lahendamisel sageli väga kasulik, on siin väga vähe selliseid ülesandeid, mille lahendamisel seda otseselt vaja läheks. Oleme valinud mõne geomeetria-ülesande, sest geomeetria on nii võluv valdkond. Kuid enamik ülesannetest on siiski lahendatavad algteadmistega arvude kohta, loogilise mõtlemise ja loomuliku nupukusega.

Neile, kelle teadmised on pisut rooste läinud, lisasime sõnastiku, milles on veidi matemaatilist terminoloogiat ja mõned geomeetriaivalda kuuluvad baasfaktid nurkade kohta.

Lahendused

Soovides kirja panna kõikide ülesannete täislahendused koos detailsete selgitustega, läheks vaja neli korda paksemat raamatut kui see. Seetõttu on meil üldiselt ära toodud vaid lühikesed lahenduskäigud, samas saate nende abil veenduda, kas lahendasite ülesande õigesti, samuti aitavad need teid hädast välja, kui jääte toppama.

Paljudele ülesannetele leiame detailsed lahendused allpool loetletud UKMT väljaannetest. Paljude ülesannete lahendused, eriti hilisemate aastate omad on (tasuta!) alla laaditavad UKMT kodulehelt www.ukmt.org.uk.

UKMT korraldatavad võistlused

Järgnevalt on ära toodud UKMT võistlused, kust ülesanded on võetud, see annab ettekujutuse õpilastest, kellele need on suunatud, ja lahendamiseks antud ajapiirangutest. Millisele võistlusele õpilased kvalifitseeruvad, sõltub nende kooliaastast. Kuna Suurbritannia eri osades on kooliaastad erinevad, oleme need lihtsuse mõttes taandanud õpilaste vanusele.

Primary Team Maths Resources (PTMR)

Need on erinevad meeskondlikud võistlused, mis on mõeldud 10–11-aastastele õpilastele, eesmärgiga abistada keskkooli, kui nad korraldavad algkoolide jaoks üritusi. Võistlused sarnanevad üldjoontes Team Maths Challenge'ile, kuid sisaldavad ka loogikaülesandeid, mida oleme kasutanud vaheülesannetena.

Junior Mathematical Challenge (JMC)

Intermediate Mathematical Challenge (IMC)

Senior Mathematical Challenge (SMC)

Need võistlustööd koosnevad kõik 25-st valikvastustega ülesandest. JMC on mõeldud 12–13-aastastele õpilastele, IMC õpilastele vanuses 14, 15 või 16 ja SMC õpilastele vanuses 17 või 18. Sageli teevad võistlustöid nooremad

õpilased, kui vanusegrupis on määratud. JMC ja IMC jaoks on õpilastel aega 60 minutit ja SMC jaoks 90 minutit.

Känguru võistlused

International Mathematical Kangaroo (Kangourou sans Frontières) on rahvusvaheline matemaatikavõistlus, mis toimus esmakordselt 1991. aastal Prantsusmaal, nüüdseks osaleb selles üle 50 riigi. Idee sai alguse Austraalia matemaatikavõistlusest, mistõttu ongi sarja nimi Känguru. UKMT kasutab Känguru ülesandeid neljal võistlusel, millest võivad osa võtta õpilased, kes on Challenge'i võistlustel häid tulemusi saanud:

Junior Kangaroo õpilastele vanuses 12 või 13;

Grey Kangaroo õpilastele vanuses 14;

Pink Kangaroo õpilastele vanuses 15 või 16;

Senior Kangaroo õpilastele vanuses 17 või 18.

Iga võistlustöö koosneb 25-st ülesandest, mille lahendamiseks on aega 60 minutit. *Junior*, *Gray* ja *Pink Kangaroo* ülesanded on valikvastustega. *Senior Kangaroo* võistlustöös küsitakse õpilastelt arvulisi vastuseid, kuid lahenduskäiku pole vaja esitada.

Olümpiaadid

Need võistlused on mõeldud õpilastele, kes on väga hästi esinenud Mathematical Challenge'itel. Võistlustööde tuum on väike arv väga raskeid ülesandeid, mille puhul tuleb vastusega koos ära näidata ka täielik lahenduskäik. Neid nimetatakse olümpiaadideks, sest nad on osa teekonnast, mis viib UKMT võistkonna rahvusvahelisele matemaatikaolümpiaadile (International Mathematical Olympiad), võistlusele, kus osaleb üle saja riigi.

Junior Mathematical Challenge'ile järgneb Junior Mathematical Olympiad, see on õpilastele vanuses 12 ja 13 aastat. Tegemist on kahetunnise võistlustööga, mis koosneb kümnest A-osa ülesandest (nõutavad ainult vastused) ja viiest B-osa ülesandest (nõutavad täielikud lahenduskäigud).

Intermediate Mathematical Challenge'ile järgneb kolm olümpiaadi. Need on: Cayley Mathematical Olympiad 14-aastastele, Hamilton Mathematical Olympiad 15-aastastele ja Maclaurin Mathematical Olympiad 16-aastastele õpilastele. Kõik need võistlused kestavad kaks tundi ja koosnevad kuuest ülesandest, millele oodatakse täielikke lahenduskäike. (Enne 2006. aastat koosnesid need tööd samuti A- ja B-osast.)

16- ja 17-aastastele tüdrukutele korraldatakse võistlust Mathematical Olympiad for Girls (MOG). Selle eesmärk on julgustada ja inspireerida võimalikult palju tüdrukuid lahendama keerukaid matemaatikaülesandeid. Olümpiaad

kestab kaks ja pool tundi ning koosneb viiest raskest ülesandest, millele oodatakse täielikke kirjalikke lahenduskäike.

17- ja 18-aastastele õpilastele mõeldud Senior Mathematical Challenge'ile järgneb British Mathematical Olympiad'i (BMO) kaks vooru. Pääsu teise vooru tagab esimese läbimine. Teise vooru ülesanded on väga rasked. Nende võistlustööde jaoks antakse õpilastele aega kolm ja pool tundi.

Team Maths Challenge on võistkondlik võistlus, kus võistkonda kuulub neli 14-aastast või nooremast õpilast. Igal aastal toimub rohkem kui 60 piirkondlikku finaali, millele järgneb juunikuus korraldatav riiklik finaali. Võistlusel on neli vooru: grupitöö, numbriristsõna, süstikuvõistluse voor. Ka selles raamatus on palju numbriristsõnu, mille juures on seletatud, kuidas neid lahendada. Muudest voorudest pärit ülesandeid oleme kasutanud nädalaülesannetes. Samalaadne, kuid 17- ja 18-aastastele õpilastele suunatud võistlus, on ka Senior Team Maths Challenge, mida korraldatakse koostöös Advanced Mathematics Support Programme'iga.

Lisasime ka mõne ülesande, mis kuulub UKMT mentorlusprogrammi. Programmi raames antakse õpilastele iga kuu ülesannete lehed. Nad lahendavad neid oma suva järgi ning võivad abi küsida mentorilt, kes kommenteerib ka lahendusi. Õpilased ei võistle omavahel.

UKMT väljaanded

Siin on loetletud eeltoodud UKMT võistluste kohta käivaid väljaandeid. Nendes on ära toodud ülesannete täielikud lahenduskäigud ja neid saab tellida UKMT kodulehelt www.ukmt.org.uk.

Aastaraamatud

UKMT on andnud alates 1998/1999. õppeaastast igal aastal välja aastaraamatu, kus on ära toodud selle õppeaasta ülesanded ja täielikud lahendused.

Matemaatikaülesannete kogud

Järgnevad raamatud sisaldavad kõiki aasta jooksul toimunud Junior, Intermediate ja Senior Mathematical Challenges'ite ülesandeid koos lühilahendustega:

„Ten Years of Mathematical Challenges: 1997 to 2006”,
UKMT, 2006.

„Ten Further Years of Mathematical Challenges:
2006 to 2016”, UKMT, 2016.

Järgmised kolm raamatut sisaldavad kõiki vastava Mathematical Challenge'i võistluse ülesandeid kuni väljaandmisaastani, mis on järjestatud teema

ja raskusastme järgi. Ülesanded on ilma valikvastusteta ja raamatus on vihjed nende lahendamiseks, kuid mitte täislahendusi.

- „Junior Problems”, Andrew Jobbings, UKMT, 2017.
- „Intermediate Problems”, Andrew Jobbings, UKMT, 2016.
- „Senior Problems”, Andrew Jobbings, UKMT, 2018.

Viimaste aastate kõikide Challenge'i võistluste lühikesed ja pikad lahendused koos edasiseks uurimiseks soovitatud ülesannetega saab tasuta alla laadida UKMT veebilehelt.

Matemaatikaolümpiaadid

Järgmised raamatud annavad nõu erineva tasemega keerukamate ülesannete lahendamiseks ja sisaldavad erinevatelt olümpiaadidelt pärinevaid ülesandeid ja lahendusi.

- „First Steps for Problem Solvers”, Mary Teresa Fyfe ja Andrew Jobbings, UKMT, 2015 – sisaldab kõiki võistluse Junior Mathematical Olympiad ülesandeid koos lahendustega, aastatest 1999 kuni 2015.
- „A Problem Solver's Handbook”, Andrew Jobbings, UKMT, 2013 – sisaldab kõiki võistluse Intermediate Mathematical Olympiad ülesandeid koos lahendustega, aastatest 2003 kuni 2012.
- „A Mathematical Olympiad Primer”, 2. trükk, Geoff Smith, UKMT, 2011 – sisaldab kõiki võistluse British Mathematical Olympiad 1. vooru ülesandeid koos lahendustega, aastatest 1996 kuni 2010.
- „A Mathematical Olympiad Companion”, Geoff Smith, UKMT, 2016 – sisaldab kõiki võistluse British Mathematical Olympiad 2. vooru ülesandeid koos lahendustega, aastatest 2002 kuni 2016.

Ülesanded

1. nädal

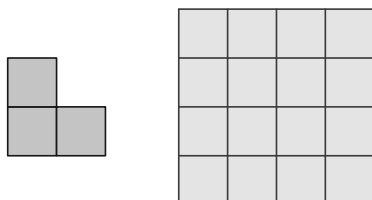
1. Mitu kaubikutäit?

Kõik transpordifirma kaubikud suudavad kanda maksimaalselt 12-tonnist raskust. Firma peab transportima 24 kasti, iga kast kaalub 5 tonni.

Mitu kaubikut läheb kastide transportimiseks vaja?

2. L-i mõistatus

Triin asetab joonisel näidatud 4×4 ruudustikku L-kujundeid nii, et iga L-kujund katab ruudustikus ära täpselt kolm ruutu.



Ta võib L-kujundit keerata või ümber pöörata.

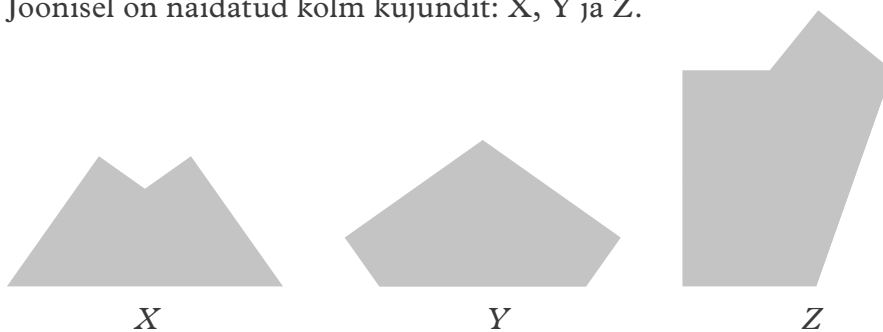
Kui palju L-kujundeid saab Triin ruudustikku paigutada, ilma et need omavahel kattuksid?

3. Vanaema elektrimõõdik

Eile oli vanaema elektrimõõdiku näit 098657. Ta avastas üllatusega, et kõik numbrid näidus on erinevad. Kui palju ühikuid elektrit peab vanaema kasutama, enne kui näidikul on uuesti kõik numbrid erinevad?

4. Paberi voltimine

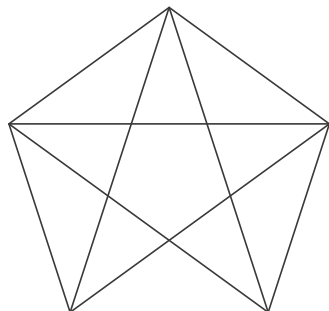
Joonisel on näidatud kolm kujundit: X, Y ja Z.



Leht A4-formaadis paberit (mõõtmetega 297 mm \times 210 mm) on volditud ühe korra ja asetatud lauale. Millist neist kujunditest saaks niimoodi teha?

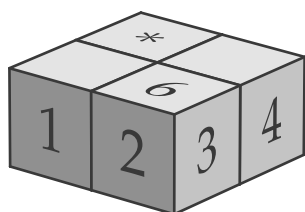
5. Kui palju kolmnurki?

Kui palju kolmnurki on joonisel kokku, ükskõik millises suuruses?



6. Neli täringut

Raidul on neli tavalist täringut, mis on omavahel identsed, ja ta paneb need kokku joonisel näidatud viisil.



Kõigi täringute kokkupuutekohtades on vastamisi olevatel külgedel samad numbrid. Mõni täringu küljel olev number on joonisel näidatud. Mis number peaks olema tärniga märgistatud küljel? (Tavalisel täringul on kõikide vastaskülgede numbrite summa 7.)

7. 73 saamine

Tarmo mõtles ühele täisarvule ja korrutas seda arvu kas viie või kuuega. Krista liitis Tarmo saadud vastusele juurde kas viie või kuue. Lõpuks lahutas Elina Krista vastusest viie või kuue. Lõplik vastus oli 73. Mis arvu Tarmo alguses valis?

2. nädal

8. Kümnendaeg

18. sajandi lõpus tuldi välja kümnendsüsteemis ajaarvestamise ideega, kus igas tunnis oleks 100 minutit ja igas päevas 10 tundi.

Oletades, et selline kell käivituks südaösel kell 00:00, siis mida see näitaks, kui tavaline kell näitaks kell 6:00 hommikul?

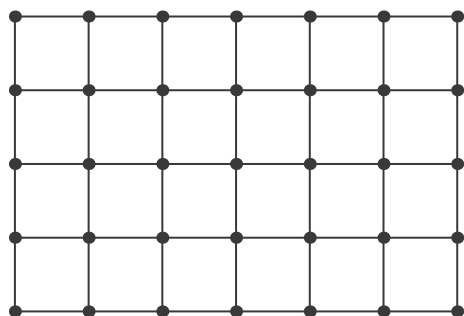
9. Üks suurus sobib kõigile

Harri matemaatikasõbrast vanaemal on pimedas kapinurgas suur kotitais üks-suurus-sobib-kõigile-sokke. Seal on paar punaseid, siniseid, roosasid ja rohelisi sokke.

Mitu sokki peab ta kotist välja tõmbama, et olla kindel, et saab kokkusobiva paari?

10. Võrgu lõikamine

Joonisel on kujutatud nelinurkset kalavõrku, kus nöörid on näidatud punktides kokku sõlmitud.



Võrku lõigatakse korduvalt katki; iga lõige tehakse täpselt kahe kõrvuti oleva sõlmekoha vahelt.

Milline on suurim arv lõikeid, mida saab teha, ilma et võrku lahutataks kaheks eraldiseisvaks tükiks.

11. Ajad muutuvad

Digitaalne kell näitab tunde, minuteid ja sekundeid; mitu korda 24 tunni jooksul muutuvad korraga kõik kuus numbrit?



12. Kaose tegemine

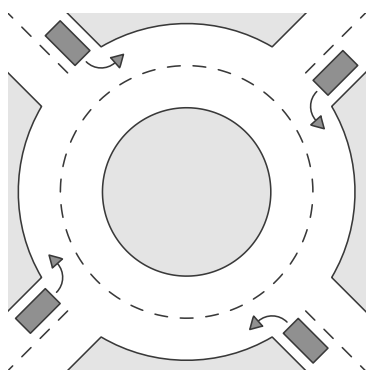
Näidatud liitmistehtes tähistab iga täht kindlat nullist erinevat numbrit.

$$\begin{array}{r} S O O \\ + S O O \\ \hline K A O S \end{array}$$

Millised numbrid vastavad tähtedele?

13. Ringristmik

Neli autot sõidavad üheaegselt ringristmikule, igaüks ise suunast, nagu joonisel näidatud.



Kõik autod sõidavad kellaosuti liikumise suunas ja lahkuvad ristmikult enne täisringi tegemist. Ükski auto ei lahku ristmikult samale teele, mille kaudu teine auto on juba lahkunud.

Mitu erinevat võimalust on autodel ringristmikult väljumiseks?

14. Tõene või väär?

Ükski neist väidetest pole tõene.
Ainult üks väide on tõene.
Täpselt kaks väidet on tõesed.
Kõik väited on tõesed.

Mitu väidet kastis on tõesed?